Ορισμός (Εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$ ευκλείδειο).

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ_k^* στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται ως:

$\lambda_k^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ όπου

$$\lambda_k^*(A) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} V(I_n) : \text{όπου } I_n \text{ ανοιχτό φραγμένο διάστημα του } \mathbb{R}^k \text{ που } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}, \forall A \subset \mathbb{R}^k$$

όπου λέγοντας ανοιχτό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}^k$ εννοούμε

$I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k)$ όπου $a_i < b_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$

Έτσι, ο όγκος ή το μέτρο Lebesgue του I είναι τ

$V(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_k - a_k)$

Γενικά, ένα διάστημα I του $\mathbb{R}^k$ είναι ένα καρτεσιανό γινόμενο των διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $V(I)$ ως το γινόμενο των μηκών των διαστημάτων.
Αν κάποιο από τα διαστήματα έχει μήκος 0 τότε $V(I)=0$
Δηλαδή, δεχόμαστε πλέον ότι $0\cdot(+\infty)=0$
Για $k=1$ ο όγκος του διαστήματος είναι το μήκος του και τότε $\lambda_1^*=\lambda^*$.
Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης γράφουμε λ^* αντί για λ_k^* αν είναι φανερό για ποιο k αναφερόμαστε.

ΛΗΜΜΑ

i) Η οικογένεια Δ των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ που γράφονται ως πεπερασμένες ξένες ενώσεις διαστημάτων είναι άλγεβρα στον $\mathbb{R}^k$.

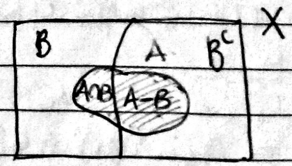
ii) Αν I_i, $i=1,2,\dots,n$ ξένα ανά δύο διαστήματα του $\mathbb{R}^k$, $I=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ και J διάστημα του $\mathbb{R}^k$ ώστε $I\subset J$, τότε $\sum_{i=1}^{n} v(I_n) \le v(J)$ και αν I διάστημα τότε: $v(I)=\sum_{i=1}^{n} v(I_i)$.

Πρόταση

Το λ_k^* είναι πράγματι εξωτερικό μέτρο και ισχύει $\lambda_k^*(I)=v(I)$, $\forall I$ διάστημα του $\mathbb{R}^k$

Ορισμός

Έστω φ ένα εξωτερικό μέτρο στο X.
Ένα $B\subset X$ λέγεται φ-μετρήσιμο αν $\forall A\subset X$ ισχύει
$\varphi(A)=\varphi(A\cap B)+\varphi(A\setminus B)$
Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_\varphi$ την οικογένεια των φ μετρήσιμων συνόλων



Παρατηρήσεις

i) Για να δείξουμε ότι $B\in\mathcal{M}_\varphi$ αρκεί νδο
$\varphi(A)\ge\varphi(A\cap B)+\varphi(A\setminus B)$, $\forall A\subset X$ με $\varphi(A)<+\infty$.

ii) Αν $\varphi(B)=0$, $\forall B\subset X$ ισχύει ότι $B\in\mathcal{M}_\varphi$, διότι απο τη μονοτονια του φ $\varphi(A\cap B)\le\varphi(B)=0$

και $\varphi(A\setminus B)\le\varphi(A)$.

Θεώρημα του Καραθεοδωρή

Εστω φ εξωτερικο μετρο στο X. Τοτε $\mathcal{M}_\varphi$ ειναι σ-αλγεβρα και μαλιστα ο περιορισμός $\varphi/_{\mathcal{M}_\varphi}$ ειναι πλήρες μέτρο.

Απόδειξη

1ο ΒΗΜΑ: Θδο $\mathcal{M}_\varphi$ άλγεβρα

- $X\in\mathcal{M}_\varphi$, διότι για κάθε $A\subset X$:
  $\varphi(A\cap X)+\varphi(A\setminus X)=\varphi(A)+\cancel{\varphi(\emptyset)}^{0}=\varphi(A)$
- Αν $B\in\mathcal{M}_\varphi$ και $A\subset X$, είναι:
  $\varphi(A\cap B^c)+\varphi(A\cap B^c)=\varphi(A-B)+\varphi(A\cap B):=\varphi(A)$
  Αρα, $B^c\in\mathcal{M}_\varphi$
- Εστωσαν $B_1,B_2\in\mathcal{M}_\varphi$ και Θδο $B_1\cap B_2\in\mathcal{M}_\varphi$.
  Για καθε $A\subset X$
  $\varphi(A)\overset{B_1\in\mathcal{M}_\varphi}{=}\varphi(A\cap B_1)+\varphi(A\cap B_1^c)\overset{B_2\in\mathcal{M}_\varphi}{=}$
  $=\varphi(A\cap B_1\cap B_2)+\varphi(A\cap B_1\cap B_2^c)+\varphi(A\cap B_1^c)$ (1)
  Ισχυει: $B_1\setminus B_2=B_1\setminus(B_1\cap B_2)$ (α)
  Επισης, $B_1\cap B_2\subset B_1\Rightarrow B_1^c\subset(B_1\cap B_2)^c$ (β)
  Αρα, η (1) γινεται:
  $\varphi(A)\overset{(α)}{=}\varphi(A\cap B_1\cap B_2)+\varphi(A\cap\overbrace{(B_1\cap B_2)^c\cap B_1}^{B_1\setminus B_1\cap B_2})+\varphi(A\cap(B_1\cap B_2)^c\cap B_1^c)$
  $\overset{(β)}{\underset{B_1\in\mathcal{M}_\varphi}{=}}\varphi(A\cap B_1\cap B_2)+\varphi(A\cap(B_1\cap B_2)^c)$.

2ο ΒΗΜΑ: Θδο αν $B_1,B_2\in\mathcal{M}_\varphi$ με $B_1\cap B_2=\emptyset$ και $A\subset X$ τοτε $\varphi(A\cap(B_1\cup B_2))=\varphi(A\cap B_1)+\varphi(A\cap B_2)$ και $\varphi(B_1\cup B_2)=\varphi(B_1)+\varphi(B_2)$.

αποδ.

$\varphi(A\cap(B_1\cup B_2))\overset{B_1\in\mathcal{M}_\varphi}{=}\varphi(A\cap(B_1\cup B_2)\cap B_1)+\varphi(A\cap(B_1\cup B_2)\cap B_1^c)=$
$\underset{B_1\cap B_2=\emptyset}{=}\varphi(A\cap B_1)+\varphi(A\cap B_2)$

Η δευτερη ισοτητα προκυπτει για $A=X$

3ο ΒΗΜΑ: Εστω $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $B_n\cap B_m=\emptyset$, $\forall n\neq m$ ακολουθια της $\mathcal{M}_\varphi$.

Από 1º & 2º ΒΗΜΑ : η $\varphi|\mathcal{M}_\varphi$ είναι πεπερ. προσθ. μέτρο και αν $B_1,\dots,B_n \in \mathcal{M}_\varphi$ ξένα ανά δύο τότε $\forall A \subset X$
$\varphi(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A \cap B_i)$
Τότε, το $\underbrace{B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$ $\in \mathcal{M}_\varphi$ και $\underbrace{\varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)}$.
Αρκεί, νδο για κάθε $A \subset X$: $\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A \cap B_n) + \varphi(A \setminus B)$. Η πρώτη ισότητα εξασφαλίζει ότι $B \in \mathcal{M}_\varphi$
και η δεύτερη ισότητα για $A = B$ δίνει το 2º συμπέρασμα.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα σύνολα $B_1,\dots,B_n, (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)^c$ είναι ξένα ανά δύο που ανήκουν στην $\mathcal{M}_\varphi$ (αφού $\mathcal{M}_\varphi$ άλγεβρα).
Άρα το $\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A \cap B_i) + \varphi(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)^c) \geq$
$\overset{\varphi \uparrow}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \varphi(A \cap B_i) + \varphi(A \cap B^c)$.

Εφόσον, η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Άρα, για $n \to +\infty$ έχουμε
$\varphi(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A \cap B_i) + \varphi(A \cap B^c) \overset{\sigma\text{-υποπρ.}}{\geq} \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) \geq$
$\overset{\sigma\text{-υποπροσ}}{\geq} \varphi(A)$. Άρα, $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A \cap B_n) + \varphi(A \cap B^c)$.

Από το βήμα 1º & 3º έπεται πως η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα και επίσης $\varphi/\mathcal{M}_\varphi$ είναι μέτρο
$\varphi/\mathcal{M}_\varphi$ πλήρες διότι
για τυχόν $B \subset X$: $\exists C \in \mathcal{M}_\varphi$ ώστε $B \subset C$ και $\varphi(C) = 0$ και τότε από μονοτονία : $\varphi(B) = 0$ και από προηγούμενη Παρατήρηση 2 είναι $B \in \mathcal{M}_\varphi$.

<u>Ορισμός</u>:
Κάθε σύνολο $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ καλείται Lebesgue μετρήσιμο σύνολο

<u>Θεώρημα</u>
Κάθε σύνολο Borel είναι και Lebesgue μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^k$.
Δηλ. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{M}_{\lambda^*}$
<u>Απόδειξη</u>
Έστω $\Delta_1 = \{ \bigtimes_{i=1}^{n} (-\infty, b_i] : b_1,\dots,b_k \in \mathbb{R} \}$
Αρκεί νδο $\Delta_1 \subset \mathcal{M}_{\lambda^*}$ (διότι εφόσον $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ σ-άλγεβρα

$\sigma(\Delta_1) \subset \mathcal{M}_{\lambda^*}$ δηλαδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{M}_{\lambda^*}$)

Σταθεροποιούμε $B = \bigtimes_{i=1}^{k} (-\infty, b_i] \in \Delta_1$

Για να δ.ο $B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ αρκεί ν.δ.ο $\forall A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) < +\infty$

ισχύει $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B)$

Εστω $\varepsilon > 0$.

Από τον ορισμό του $\lambda^*(A)$, $\exists (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανοιχτών φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$, ώστε $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

και $\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$

Επίσης, $A \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap B)$, $I_n \cap B$ φραγμ. διάστημα

και $A \setminus B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \setminus B)$, $I_n \setminus B$ άλγεβρα του προηγούμενου λήμματος. Άρα, $I_n \setminus B = \bigcup_{i=1}^{k_n} I_{n,i}$, $(I_{n,i})_{i=1}^{k_n}$ ξένα ανά δύο φραγμένα διαστήματα

Παρατηρούμε ότι αν I φραγμ. διαστ. και $\delta > 0$, τότε $\exists J$ ανοιχτό φραγμ. διάστημα με $I \subset J$ και $v(J) < v(I) + \delta$. Άρα, $\exists$ ανοιχτά φραγμ. διαστήματα $J_n, (J_{n,i})_{i=1}^{k_n}$ ώστε $I_n \cap B \subset J_n$, $I_{n,i} \subset J_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$

και μάλιστα $v(J_n) + \sum_{i=1}^{k_n} v(J_{n,i}) <$

$< v(I_n \cap B) + \sum_{i=1}^{k_n} v(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \overset{\text{Λήμμα}}{=} v(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

$A \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$

$A - B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n - B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{k_n} v(J_{n,i}) \right)$

Έτσι,

$$\lambda^*(A \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(J_n)$$

$$\oplus \quad \lambda^*(A - B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} v(J_{n,i})$$

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(v(J_n) + \sum_{i=1}^{k_n} v(J_{n,i}) \right) <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \left(v(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda^*(A) + \varepsilon$$

Και η απόδειξη είναι πλήρης

<u>Ασκήσεις για ενασχόληση:</u>

1-2, 1-3, 1-4, 1-10, 1-11

$A \neq \emptyset$

2-1, 2-6, 2-11, 2-13

3-1, 3-2, 3-8, 3-9, 3-10 (Νεγρεπόντης)

Ορισμός: Ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue λ_k^* στην $\mathcal{M}_{\lambda_k^*}$ λέγεται μέτρο Lebesgue που συμβολίζεται με και συμβολίζεται με λ_k (ή απλώς λ)

Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή, το λ είναι πλήρες μέτρο. Ορισμένες φορές το λ^* περιορισμένο στα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, δηλ. $\lambda^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)}$ λέγεται μέτρο Lebesgue και συμβολίζεται με λ.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ/ΠΡΟΤΑΣΗ

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \text{ με } B \supseteq A\} =$$

$$= \inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό με } U \supseteq A\}.$$

Απόδειξη

Αν $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ με $B \supseteq A$ τότε

$$\underset{\text{Μονοτονία}}{\lambda^*(A) \leq} \lambda^*(B) \underset{B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}}{=} \lambda(B)$$

Άρα, $\lambda^*(A) \leq \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \text{ με } B \supseteq A\} \leq$

$\leq \inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό με } U \supseteq A\}$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$\inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό } U \supseteq A\} \leq \lambda^*(A)$

Αν $\lambda^*(A) = +\infty$ ισχύει

Αν $\lambda^*(A) < \infty$ τότε

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$

Τότε εξ ορισμού του λ^* $\exists (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανοιχτών & φραγμ. διαστημάτων με το $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ & $\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon$

Θέτουμε λοιπόν ως:

$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ανοιχτό $\supseteq A$ και $\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) \leq$

$\leq \lambda^*(A) + \varepsilon$

Άρα, $\inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό } U \supseteq A\} \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

Άρα, $\inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό } U \supseteq A\} \leq \lambda^*(A)$

Και η απόδειξη είναι πλήρης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Βασικές Ιδιότητες του Μέτρου Lebesgue

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και X μετρικός χώρος και $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$. Τότε το μ λέγεται κανονικό αν:

i) $\mu(K) < +\infty$ για κάθε K συμπαγές $\subset X$

ii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοιχτό}, U \supset A\}$, $\forall A \in \mathcal{A}$ ← Εξωτερική κανονικότητα

iii) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subset U\}$, $\forall U$ ανοιχτό $\subset X$ ← Εσωτερική κανονικότητα

Πρόταση

Το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^k$ είναι κανονικό.
Επιπλέον, ισχύει:
$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subset A\}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$
(όχι μονάχα για τα ανοιχτά όπως στον ορισμό).

Απόδειξη

$\mathcal{M}_{\lambda^*} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$: έχει λοιπόν νόημα να μιλάμε για κανονικότητα

i) Αν K συμπαγές $\Rightarrow \exists I \subset \mathbb{R}^k$ ανοιχτό και φραγμένο με $K \subset I$, άρα το $\lambda(K) \le \underbrace{\lambda(I)}_{=\lambda^*(I)} = v(I) < +\infty$

ii) Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$: $\lambda(A) = \lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό} \supset A\}$ από προηγούμενη ιδιότητα/πρόταση.

iii) Προφανώς αρκεί νδο
$\lambda(A) \le \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές} \subset U\}$.

• Αν A φραγμένο τότε $\exists L$ συμπαγές με $A \subset L$ (πχ $L = \bar{A}$)
Έστω $\varepsilon > 0$
Από την εξωτερική κανονικότητα, $\exists U$ ανοιχτό $\supset L \setminus A$ ώστε $\lambda(U) < \lambda(L \setminus A) + \varepsilon$.
Θέτουμε $K = L \setminus U$ συμπαγές ως κλειστό $\subset L$ που είναι επίσης συμπαγές.

Επίσης, $K \subset A$ $(x \in k = \Delta \setminus U \Rightarrow x \notin U \Rightarrow x \notin \Delta \setminus A \Rightarrow x \in A)$

$\lambda(k) = \lambda(\Delta \setminus (\Delta \cap U)) = \lambda(\Delta) - \lambda(\Delta \cap U) \geq \lambda(\Delta) - \lambda(U) > \lambda(\Delta) - \lambda(\Delta \setminus A) - \varepsilon$

Άρα, $\lambda(k) \geq \lambda(A) + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lambda(k) \geq \lambda(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(A) \leq \sup\{\lambda(k) : k$ συμπαγές $, k \subset A\}$.

- Γενικώς (αν A όχι φραγμένο)
  Τότε το A γράφεται $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ με $(A_n) \uparrow$ αυξ. φραγ
  (πχ $A_n = A \cap S(0,n)$)
  Τότε $\lambda(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\sup\{\lambda(k) : k$ συμπαγές $k \subset A\}\}$

  $\leq \sup\{\lambda(k) : k$ συμπαγές $, k \subset A\}$.